J. Math. Pures Appl.,
78, 1999, *p.* 895-911

PROLONGEMENT DE COURANTS POSITIFS À TRAVERS UNE SOUS-VARIÉTÉ CR

Stéphane GIRET *

Université de Poitiers, Laboratoire de Mathématiques, ESA CNRS 6086, UFR Sciences SP2MI – Téléport 2 – Boulevard Marie et Pierre Curie – B.P. 30179 – 86960 Futuroscope Chancneuil Cedex, France

Manuscrit reçu le 30 janvier 1999

ABSTRACT. – In this paper, we prove an extension theorem through a Cauchy–Riemann submanifold of $\mathbb{C}^n$, for positive currents. In the particular case of a real analytic Levi-flat submanifold, we complete this study by generalizing J.R. King and N. Sibony's results relating to Schwarz's symmetry problem. We were induced to describe the structure of locally flat currents with support in CR submanifolds. Furthermore, we apply our result to study extension of positive currents across real analytic subsets. © Elsevier, Paris

RÉSUMÉ. – Dans cet article, on montre un théorème de prolongement de courants positifs à travers une sous-variété de Cauchy–Riemann de $\mathbb{C}^n$. Dans le cas où la sous-variété est réelle analytique Levi-plate, on complète cette étude en généralisant les résultats de J.R. King et N. Sibony concernant le problème de symétrie de Schwarz. Pour cela, on est amené à préciser la structure des courants localement plats à support dans une sous-variété de Cauchy–Riemann. Enfin, on applique le théorème d'extension à l'étude du prolongement des courants positifs à travers des ensembles analytiques réels. © Elsevier, Paris

Introduction

L'objectif de cet article est d'étudier le prolongement de courants positifs à travers un obstacle ayant une propriété de type Cauchy–Riemann.

La première partie est consacrée à l'étude de la structure des courants sur une sous-variété de Cauchy–Riemann. On montre tout d'abord un théorème de support : si Θ est un courant localement plat de dimension $r \geqslant 2p$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$, à support dans une sous-variété de Cauchy–Riemann A de dimension de Cauchy–Riemann inférieure à p et n'ayant que des composantes $\Theta_{i,j}$ de bidimension (i, j) avec $i, j \geqslant p$, alors le support de chaque composante $\Theta_{i,j}$ est égal à celui de Θ. On s'intéresse ensuite au cas particulier d'un courant fermé d'ordre 0.

On applique, dans une deuxième partie, ces théorèmes de structure à l'étude du prolongement de courants positifs à travers une sous-variété de Cauchy–Riemann ; la motivation initiale est les résultats de prolongement de H. El Mir (cf. [7]) et N. Sibony (cf. [16]) d'une part, et d'autre part, les travaux récents de G. Raby et J.-B. Poly (cf. [15]). On montre le résultat suivant : si A est une sous-variété de Cauchy–Riemann de classe C^1 d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ de dimension de Cauchy–Riemann k et si T est un courant positif de bidimension (p, p), $p \geqslant k+1$, sur $\Omega \setminus A$

* E-mail : giret@mathlabo.univ-poitiers.fr

tel que son bord bT se prolonge en un courant $\widetilde{bT}$ de masse localement finie dans Ω, alors T admet une extension triviale $\widetilde{T}$ à Ω localement normale. Si de plus $p \geqslant k+2$, cette extension vérifie $b\widetilde{T} = \widetilde{bT}$. Dans le cas où A est réelle analytique Levi-plate, nous complétons cette étude en traitant à part le cas limite $p = k+1$. On montre l'existence d'un majorant de Θ «optimal».

Enfin, en guise d'application, on s'intéresse à l'étude du prolongement des courants positifs à travers certains ensembles analytiques réels : le premier résultat concerne l'extension des courants positifs fermés à travers des ensembles analytiques de petite dimension ; le second traite de l'extension des courants positifs tels que leur bord se prolonge à travers des ensembles analytiques réels ayant une propriété CR.

Les résultats de cet article sont extraits de [9] ; on peut y trouver quelques détails et compléments.

1. Préliminaires et notations

Pour les généralités concernant la théorie des courants, nous renvoyons le lecteur à [5,14,8].

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$. On désigne par $\mathcal{D}^p(\Omega)$ l'espace des formes différentielles C^∞ de degré p à support compact dans Ω, et par $\mathcal{D}'_{p,q}(\Omega)$, celui des courants de bidimension (p,q) sur Ω. Si T est un courant d'ordre 0 de dimension p sur Ω et W un ouvert relativement compact dans Ω, on note $\mathcal{M}_W(T)$ la *masse* du courant T dans W, soit $\mathcal{M}_W(T) = \sup\{\langle T, \alpha\rangle \mid \alpha \in \mathcal{D}^p(W)$ et $|\alpha| \leqslant 1\}$.

Un courant T de bidimension (p,p) sur Ω est dit *positif* si, pour toutes formes différentielles $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ de classe C^∞ de bidegré $(1,0)$ sur Ω, la distribution

$$T \wedge \frac{i}{2}\alpha_1 \wedge \overline{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \frac{i}{2}\alpha_p \wedge \overline{\alpha_p}$$

est une mesure positive. Par ailleurs, sa masse est contrôlée par sa masse de Kähler, c'est-à-dire, si $\beta = \frac{i}{2}\partial\overline{\partial}|z|^2$ désigne la forme de Kähler sur $\mathbb{C}^n$, la *mesure trace* de T, définie par $\|T\| = T \wedge \beta^p/p!$, vérifie l'inégalité :

$$\|T\|(U) \leqslant \mathcal{M}_U(T) \leqslant C\|T\|(U) \quad \forall U \Subset \Omega,$$

où C est une constante supérieure à 1 qui ne dépend que de n et de p. On pose $d^c = i(\overline{\partial} - \partial)$, de sorte que $dd^c = 2i\partial\overline{\partial}$.

Soit A une sous-variété de classe C^1 d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$. En tout point x de A, on note T_xA l'*espace tangent* à A en x et on définit la dimension CR (Cauchy–Riemann) de A en x par :

$$\dim_x^{CR} A = \dim_{\mathbb{C}}(T_xA \cap iT_xA).$$

Le sous-variété A est dite *de Cauchy–Riemann* (ou CR) si sa dimension CR est la même en tout point de A.

Énonçons maintenant un résultat de mise sous forme normale pour les sous-variétés réelles analytiques CR Levi-plates ; la démonstration de cette propriété se trouve par exemple dans [4].

PROPOSITION 1.1. – *Soit A une sous-variété analytique réelle* CR *d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$. Alors la forme de Levi de A est identiquement nulle si et seulement si pour tout point a de A, il existe un voisinage U de a dans Ω, un voisinage V de* 0 *dans $\mathbb{C}^n$ et un biholomorphisme $F : U \to V$ tels que* :

$$F(A \cap U) = \left(\mathbb{C}^k \times \mathbb{R}^l \times \{0\}\right) \cap V.$$

Nous renvoyons à [1,4] pour toutes les notions concernant les sous-variétés de Cauchy–Riemann.

2. Deux théorèmes de structure

Le premier résultat concerne les courants localement plats à support dans une sous-variété CR. Rappelons qu'un courant Θ est dit *localement plat* sur Ω s'il s'écrit $\Theta = [\varphi] + d[\psi]$ avec φ et ψ des formes différentielles à coefficients localement intégrables sur Ω.

Un premier théorème de support

On généralise ici un résultat dû à J.-P. Demailly (cf. [6], proposition 2.5) de la façon suivante :

THÉORÈME 2.1. – *Soit A une sous-variété de classe C^1 d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ telle que* $\dim_z^{CR} A \leqslant p$ *pour tout z de A. On considère un courant Θ localement plat de dimension $r \geqslant 2p$ sur Ω, à support dans A et s'écrivant* :

$$\Theta = \Theta_{p,r-p} + \cdots + \Theta_{r-p,p}. \tag{$*$}$$

Alors pour tout $\alpha \in \langle p, r-p\rangle$, on a :

$$\operatorname{Supp}\Theta = \operatorname{Supp}\Theta_{\alpha,r-\alpha},$$

où $\Theta_{i,j}$ désigne la composante de bidimension (i,j) de Θ.

Démonstration. – Soit $z \in A$. Il existe un voisinage W de z dans Ω et un système de coordonnées locales $(w_1, \ldots, w_{2n})$ tels que :

$$A \cap W = \bigl\{\zeta \in W \mid w_1(\zeta) = \cdots = w_N(\zeta) = 0\bigr\}.$$

On montre le résultat par récurrence sur r. Tout d'abord, si $r = 2p$, alors le courant Θ est nécessairement de bidimension (p,p) et par suite, on a $\operatorname{Supp}\Theta = \operatorname{Supp}\Theta_{p,p}$. On peut donc supposer $r \geqslant 2p+1$. Supposons maintenant que le résultat est vrai pour les courants de dimension $r-1$ et montrons qu'alors il est vrai pour les courants de dimension r. On considère donc un courant Θ vérifiant les hypothèses du théorème et on suppose qu'il existe $\alpha \in \langle p, r-p\rangle$ tel que sa composante $\Theta_{\alpha,r-\alpha}$ soit nulle. On veut alors montrer que Θ est nul. Comme les courants Θ et $d\Theta$ sont localement plats sur Ω à support dans A, ils proviennent de courants de la sous-variété A d'après un théorème de support de Federer (cf. [8]). On a, par conséquent, $w_j\Theta = 0$ et $w_j d\Theta = 0$ pour tout $j \in \langle 1, N\rangle$ et, par suite,

$$dw_j \wedge \Theta = d(w_j\Theta) - w_j d\Theta = 0 \quad \forall j \in \langle 1, N\rangle.$$

En utilisant la décomposition $(*)$ et le fait que $\Theta_{\alpha,r-\alpha} = 0$, on a, par identification des bidimensions, les relations suivantes :

$$\partial w_j \wedge \Theta_{p,r-p} = 0, \qquad \partial w_j \wedge \Theta_{\alpha+1,r-\alpha-1} = 0,$$
$$\overline{\partial} w_j \wedge \Theta_{r-p,p} = 0, \qquad \overline{\partial} w_j \wedge \Theta_{\alpha-1,r-\alpha+1} = 0.$$

Calculons maintenant $d^c w_j \wedge \Theta$. D'après les relations précédentes, on a :

$$d^c w_j \wedge \Theta = i(\overline{\partial} - \partial) w_j \wedge \Theta = i(\overline{\partial} w_j \wedge \Theta - \partial w_j \wedge \Theta)$$
$$= \sum_{i \in \langle p+1, r-p\rangle \setminus \{\alpha, \alpha+1\}} i(\overline{\partial} w_j \wedge \Theta_{i-1,r-i+1} - \partial w_j \wedge \Theta_{i,r-i}).$$

Ainsi, pour tout $j \in \langle 1, N\rangle$, $d^c w_j \wedge \Theta$ est un courant localement plat de dimension $r-1$ sur W, à support dans $A \cap W$, admet une décomposition du type $(*)$ au rang $r-1$ et ses composantes de bidimensions $(\alpha - 1, r - \alpha)$ et $(\alpha, r - \alpha - 1)$ sont nulles. Comme $r \geqslant 2p+1$, une des deux composantes est nécessairement de bidimension (s,t) avec $s \geqslant p$ et $t \geqslant p$. Par hypothèse de récurrence, le courant $d^c w_j \wedge \Theta$ est nul pour tout $j \in \langle 1, N\rangle$. D'autre part, comme $\dim_z^{CR} A \leqslant p$, le rang du système de 1-formes réelles $\{dw_1, \dots, dw_N, d^c w_1, \dots, d^c w_N\}$ est supérieur à $2n - 2p$. On choisit alors un repère local $(u_1, \dots, u_{2n})$ de 1-formes réelles continues au voisinage de z de telle sorte que les 1-formes $u_1, \dots, u_{2n-2p}$ soient extraites de la famille $\{dw_j,\ d^c w_j,\ 1 \leqslant j \leqslant N\}$. Dans ce repère, le courant Θ s'écrit

$$\Theta = \sum_{|K| = 2n-r} \Theta_K u_K,$$

avec $u_K = u_{k_1} \wedge \cdots \wedge u_{k_{2n-r}}$ si $K = (k_1, \dots, k_{2n-r})$. Comme $u_l \wedge \Theta = 0$ pour tout $l \in \langle 1, 2n - 2p\rangle$ et $2n - r \leqslant 2n - 2p - 1$, les coefficients Θ_K sont nuls, ce qui conclut la démonstration par récurrence sur r.

Structure des courants fermés à support dans une sous-variété CR

On considère une sous-variété réelle S de classe C^1 orientée d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ de dimension réelle $2p + k$. On suppose qu'elle est fibrée en variétés analytiques complexes de dimension p ; c'est-à-dire on suppose qu'il existe une sous-variété réelle M orientée de $\mathbb{C}^n$ de dimension réelle k et une submersion $\sigma : S \to M$ de classe C^1 dont les fibres $\sigma^{-1}(\{t\})$, $t \in M$, sont des variétés analytiques complexes de dimension p. Le but de ce paragraphe est d'étudier la structure d'un courant d'ordre 0 fermé à support dans S. Dans [6], J.-P. Demailly a étudié le cas d'un courant de bidimension pure (p,p). Par les mêmes techniques, on étend le résultat au cas d'un courant ayant une décomposition $(*)$ et on montre la caractérisation suivante :

THÉORÈME 2.2. – *On suppose que les fibres $\sigma^{-1}(t)$ sont connexes et que la sous-variété S est totalement réelle dans les directions transverses aux fibres. Alors pour tout courant fermé Θ d'ordre* 0 *sur Ω, à support dans S et s'écrivant*

$$(*) \qquad \Theta = \Theta_{p,p+d} + \cdots + \Theta_{p+d,p},$$

il existe un unique courant fermé R d'ordre 0 *et de dimension d sur M tel que* :

$$\Theta = \sigma^{\#}(R),$$

i.e., pour toute forme $\alpha \in \mathcal{D}^{2p+d}(\Omega)$, on a $\langle \Theta, \alpha\rangle = \langle R, \sigma_* \alpha\rangle$ où $\sigma_*\alpha$ est la forme sur M obtenue en intégrant sur les fibres de σ.

Démonstration. – On admet pour l'instant l'existence du courant R ; on montre tout d'abord qu'il est unique. Pour cela, il suffit de montrer que la nullité de Θ implique celle de R. En se plaçant sur des ouverts de cartes, on peut raisonner localement et donc supposer que σ est la projection $\sigma : V \times U \to U$ où V est un ouvert de $\mathbb{R}^{2p}$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^k$. On note $\varpi : V \times U \to V$ l'autre projection. On considère un courant R sur U de dimension d tel que $\sigma^{\#}R=0$. Soient $\chi\in\mathcal{D}^d(U)$ et $\beta\in\mathcal{D}^{2p}(V)$ telle que $\int_V\beta=1$. Alors $\varpi^*\beta\wedge\sigma^*\chi$ est une forme à support compact ($\operatorname{Supp}(\varpi^*\beta\wedge\sigma^*\chi)=\operatorname{Supp}\beta\times\operatorname{Supp}\chi$) sur $V\times U$ et on a : $0=\langle\sigma^*(R),\varpi^*\beta\wedge\sigma^*\chi\rangle=\langle R,\sigma_{\#}(\varpi^*\beta\wedge\sigma^*\chi)\rangle=\langle R,\chi\rangle$, i.e., $R=0$.

Montrons maintenant l'existence du courant R. Le courant Θ est fermé d'ordre 0 donc localement plat sur Ω. Il existe donc, d'après un théorème de support de Federer (cf. [8]), un courant fermé θ sur S d'ordre 0 tel que $\Theta=i_{\#}\theta$ où $i:S\hookrightarrow\Omega$ est l'injection canonique. On veut construire un courant R de dimension d sur M tel que $\langle\theta,\alpha\rangle=\langle R,\sigma_*(\alpha)\rangle$ pour toute forme α de degré $2p+d$ à support dans S. Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement de M par des ouverts de coordonnées. On va tout d'abord montrer le résultat localement. La propriété d'unicité donnera le résultat par recollement.

On considère un ouvert de carte $U\in\mathcal{U}$ muni des coordonnées $x_1,\dots,x_k$ de classe C^1 et $z\in\sigma^{-1}(U)\subset S$. Il existe alors un voisinage W de z dans $\mathbb{C}^n$ et des coordonnées locales $w_1,\dots,w_{2n}$ de classe C^1 sur W vérifiant :

(i) $w_j=x_j\circ\sigma$ sur $S\cap W\quad\forall j\in\langle 1,k\rangle$,
(ii) $S\cap W=\{\zeta\in W\mid w_j(\zeta)=0,\ k+1\leqslant j\leqslant 2n-2p\}$,
(iii) $\{w_j,\ j>2n-2p\}$ est un système de coordonnées locales sur les fibres $F_\zeta\cap W$ pour $\zeta\in S\cap W$.

Comme Θ est d'ordre 0 à support dans S, on a $w_j\Theta=0$ pour tout $j\in\langle k+1,2n-2p\rangle$. Par conséquent, $dw_j\wedge\Theta=0$ pour tout $j\in\langle k+1,2n-2p\rangle$, le courant Θ étant fermé. Montrons alors l'assertion suivante :

ASSERTION. – *Le courant θ est un courant de degré $k-d$ sur S qui s'écrit* :

$$\theta=\sum_{|K|=k-d}\theta_{K,W}\,dw_K,$$

où K est un multi-indice de longueur $k-d$ pris dans $\langle 1,k\rangle$ et $\theta_{K,W}$ est un courant d'ordre 0 *et de degré* 0 *sur $S\cap W$.*

Démonstration de l'assertion. – On montre cette assertion par récurrence sur d. Si $d=0$, c'est exactement le cas traité dans [6]. On suppose maintenant que l'assertion est vraie au rang $d-1$. Montrons qu'alors elle est vraie au rang d. En écrivant $d=\partial+\overline{\partial}$ et en décomposant le courant Θ, on a :

$$\partial w_j\wedge\Theta_{p,p+d}+\cdots+\partial w_j\wedge\Theta_{p+d,p}+\overline{\partial}w_j\wedge\Theta_{p,p+d}+\cdots+\overline{\partial}w_j\wedge\Theta_{p+d,p}=0.$$

Par identification des bidegrés, on obtient les relations :

$$\forall j\in\langle k+1,2n-2p\rangle\ \overline{\partial}w_j\wedge\Theta_{p+d,p}=0\text{ et }\partial w_j\wedge\Theta_{p,p+d}=0.$$

D'après l'hypothèse faite sur S, on a :

$$\bigcap_{j=k+1}^{2n-2p}\ker dw_j\cap\bigcap_{j=k+1}^{2n-2p}\ker d^cw_j=T_\zeta S\cap iT_\zeta S=T_\zeta F_\zeta.$$

Soit $l\in\langle 1,k\rangle$. Comme les formes dw_l sont nulles sur $T_\zeta F_\zeta$, il existe des fonctions réelles continues b_{jl} et b'_{jl}, $k+1\leqslant j\leqslant 2n-2p$, sur W telles que $dw_l=\sum_j(b_{jl}\partial w_j+b'_{jl}\overline{\partial}w_j)$

sur $S \cap W$, et par conséquent, on a :

$$dw_l \wedge \Theta = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=k+1}^{2n-2p} (b_{jl} \partial w_j \wedge \Theta_{p+i,p+d-i} + b'_{jl} \overline{\partial} w_j \wedge \Theta_{p+i-1,p+d-i+1}).$$

Le courant

$$\sum_j \big(b_{jl} \partial w_j \wedge \Theta_{p+i,p+d-i} + b'_{jl} \overline{\partial} w_j \wedge \Theta_{p+i-1,p+d-i+1}\big)$$

étant de bidimension $(p+i-1, p+d-i)$ sur $\mathbb{C}^n$, le courant Σ^l, défini par $\Sigma^l = dw_l \wedge \Theta$, est fermé de dimension $2p+d-1$ à support dans S et s'écrit $\Sigma^l = \Sigma^l_{p,p+d-1} + \cdots + \Sigma^l_{p+d-1,p}$. D'après l'hypothèse de récurrence, pour tout $l \in \langle 1, k \rangle$, on a donc :

$$(*_l) \qquad dw_l \wedge \theta = \sum_{|K|=k-d+1} \alpha_{l,K,W}\, dw_K,$$

où K est pris dans $\langle 1, k \rangle$ et $\alpha_{l,K,W}$ est d'ordre 0 et de degré 0 sur $S \cap W$. Par ailleurs, le courant θ étant de degré $k-d$ sur S, il s'écrit

$$\theta = \sum_{|K|=k-d} \theta_{K,W}\, dw_K,$$

où K est un multi-indice de longueur $k-d$ pris dans $\langle 1, k \rangle \cup \langle 2n-2p+1, 2n \rangle$ et $\theta_{K,W}$ est un courant d'ordre 0 et de degré 0 sur $S \cap W$. Les relations $(*_l)$ montrent alors que le multi-indice K est nécessairement pris dans $\langle 1, k \rangle$ et l'assertion est montrée par récurrence sur d. □

Pour tout multi-indice K pris dans $\langle 1, k \rangle$ de longueur $k-d$, on a $dw_K = \sigma^*(dx_K)$. On recolle ainsi les courants $\theta_{K,W}$ en un courant $\theta_{K,U}$ d'ordre 0 et de degré 0 sur $\sigma^{-1}(U)$ tel que :

$$\theta = \sum_{\substack{|K|=k-d \\ K \subset \langle 1,k \rangle}} \theta_{K,U}\, \sigma^*(dx_K).$$

Le courant θ étant fermé, on a d'après l'assertion, $\partial \theta_{K,U} / \partial w_j = 0$ sur $S \cap W$ pour tout $j \in \langle 2n-2p+1, 2n \rangle$ et tout multi-indice K. Comme les fibres sont connexes, il existe des courants $\nu_{K,U}$ d'ordre 0 et de degré 0 sur U tels que $\theta_{K,U} = \sigma^\#(\nu_{K,U})$, i.e., $\theta = \sigma^\#(R_U)$ où on a posé

$$R_U = \sum_{\substack{|K|=k-d \\ K \subset \langle 1,k \rangle}} \nu_{K,U}\, dx_K;$$

c'est un courant d'ordre 0 et de dimension d sur U. Pour conclure, il suffit de recoller les courants R_U en un unique courant R sur M grâce la propriété d'unicité énoncée au début de la preuve. Cette dernière prouve également que R est fermé : le courant Θ étant fermé, on a $d(\sigma^\# R) = \sigma^\#(dR) = 0$. D'après l'unicité, le courant dR est nul. □

On en déduit la structure de certains courants localement normaux à support dans une sous-variété CR. Un courant Θ est dit *localement normal* sur Ω s'il est, ainsi que son bord, à coefficients mesures.

COROLLAIRE 2.3. – *On suppose que S vérifie les hypothèses du théorème* 2.2. *Soit Θ un courant localement normal de dimension* $2p+d$ *sur Ω avec $d \geqslant 1$, à support dans S et ayant* *la décomposition* $(*)$*. On suppose également que son bord* $b\Theta$ *admet une décomposition* $(*)$*, i.e.,* $b\Theta \in \mathcal{D}'_{p,p+d-1}(\Omega) \oplus \cdots \oplus \mathcal{D}'_{p+d-1,p}(\Omega)$*. Il existe alors un unique courant* R *localement normal et de dimension* d *sur* M *tel que* $\Theta = \sigma^{\#}(R)$.

Démonstration. – Remarquons, tout d'abord, que l'unicité du Théorème 2.2 reste valable dans le cas présent d'un courant localement normal.

D'autre part, en appliquant le Théorème 2.2 à $b\Theta$, on obtient un unique courant R_1 d'ordre 0 fermé de dimension $d-1$ sur M tel que $b\Theta = \sigma^{\#}R_1$. Comme R_1 est d'ordre 0 fermé sur M, il s'écrit localement comme le bord d'un courant d'ordre 0, c'est-à-dire, pour tout $U \in \mathcal{U}$, où $\mathcal{U}$ est un recouvrement de M par des ouverts de coordonnées, il existe un courant S_1 d'ordre 0 sur U de dimension d tel que $R_{1|U} = bS_1$. Le courant S_1 est donc localement normal sur U et il vérifie :

$$b(\Theta_{|\sigma^{-1}(U)} - \sigma^{\#}S_1) = 0.$$

Le Théorème 2.2 (appliqué à $\Theta_{|\sigma^{-1}(U)} - \sigma^{\#}S_1$) montre qu'il existe un unique courant S_2 d'ordre 0 fermé sur U de dimension d tel que :

$$\Theta_{|\sigma^{-1}(U)} - \sigma^{\#}S_1 = \sigma^{\#}S_2, \quad \text{i.e.,} \quad \Theta_{|\sigma^{-1}(U)} = \sigma^{\#}(S_1 + S_2),$$

où $S_1 + S_2$ est un courant localement normal de dimension d sur U. On recolle alors, grâce à la propriété d'unicité, tous les courants ainsi obtenus sur les ouverts U, pour U parcourant $\mathcal{U}$, en un unique courant R localement normal de dimension d sur la sous-variété M. □

3. Prolongement des courants positifs

Expliquons tout d'abord l'origine de ce problème. Dans [7] (théorème III.7), H. El Mir a étudié le prolongement des courants positifs fermés à travers une sous-variété CR. Ce problème a ensuite été repris par N. Sibony dans [16] (corollaire 3.4) et étendu au cas des courants pluripositifs.

Par ailleurs, J.-B. Poly et G. Raby ont récemment généralisé, dans [15], le théorème de prolongement des courants positifs fermés de R. Harvey (cf. [10]) : ils ont remplacé l'hypothèse de fermeture du courant par : *le bord du courant se prolonge en un courant de masse localement finie dans* Ω. C'est ce qui nous a amené à étudier les problèmes de prolongement de H. El Mir et de N. Sibony pour des courants positifs tels que leur bord se prolonge en un courant de masse localement finie dans Ω.

Le théorème de prolongement

On aura besoin des deux lemmes suivants :

LEMME 3.1 (F.R. Harvey–R.O. Wells, Jr, cf. [11]). – *Si* A *est une sous-variété de classe* C^1 *totalement réelle d'un ouvert* Ω *de* $\mathbb{C}^n$*, alors il existe un voisinage* Ω' *de* A *et une fonction positive* ϱ *de classe* C^2 *et strictement plurisousharmonique sur* Ω' *telle que* :

$$A = \{z \in \Omega' \mid \varrho(z) = 0\}.$$

Le second concerne les sous-variétés de classe C^2 totalement réelles.

LEMME 3.2 (N. Sibony, cf. [16]). – *Soit* A *une sous-variété totalement réelle de classe* C^2 *contenue dans un ouvert* Ω *de* $\mathbb{C}^n$*. Soit* T *un courant d'ordre* 0 *dans* $\Omega \setminus A$ *de masse finie* *dans $\Omega \setminus A$. Alors il existe des fonctions $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ de classe C^2 sur Ω telles que $A = \{z \in \Omega \mid \varrho_1(z) = \cdots = \varrho_n(z) = 0\}$ et $(\partial\varrho_j(z))_{1 \leqslant j \leqslant n}$ engendre $\Lambda^{1,0}(\mathbb{C}^n)$ pour tout z dans A et telles que pour tout $j \in \langle 1, n\rangle$, le courant T soit sans masse sur $\varrho_j^{-1}(0)$. De plus, notant $u = \sum_{j=1}^n \varrho_j^2$, on a $A = u^{-1}(\{0\})$.*

On montre alors le théorème de prolongement suivant :

THÉORÈME 3.3. – *Soit A une sous-variété CR de classe C^1 d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ de dimension CR égale à k. On considère un courant positif T de bidimension (p, p), $p \geqslant k + 1$, sur $\Omega \setminus A$ tel que son bord bT se prolonge en un courant de masse localement finie dans Ω. Alors le courant T est de masse localement finie au voisinage des points de A. Il admet donc une extension triviale $\widetilde{T}$ à Ω, qui est l'unique courant localement plat de bidimension (p, p) sur Ω qui coïncide avec T sur $\Omega \setminus A$. De plus, on peut préciser la nature de l'extension triviale $\widetilde{T}$:*

(1) *Si $p \geqslant k + 2$, les extensions triviales $\widetilde{T}$ et $\widetilde{bT}$ à Ω vérifient l'égalité :*

$$(*) \qquad b\widetilde{T} = \widetilde{bT}.$$

(2) *Si $p = k + 1$ et si A est supposée de classe C^2, l'extension $\widetilde{T}$ est localement normale sur Ω.*

Démonstration. – On suit de près le principe de démonstration de N. Sibony (cf. [16]) : on montre tout d'abord ce résultat pour une sous-variété totalement réelle et on passe ensuite au cas d'une sous-variété CR par un argument de tranchage.

Première étape : M est supposée totalement réelle, i.e., $k = 0$. Montrons que le courant T est de masse localement finie au voisinage des points de A. Supposons tout d'abord que T est de bidimension $(1, 1)$. En raisonnant localement, on peut supposer que $0 \in A$ et, en vertu du Lemme 3.1, que dans $B = B(0, 1)$, A s'écrive $A = \varrho^{-1}(\{0\})$ où ϱ est une fonction positive de classe C^2 sur B vérifiant $dd^c\varrho \geqslant C\beta$ avec $\beta = \frac{i}{2}\partial\overline{\partial}|z|^2$. Posant $K = \{z \in A \mid \frac{1}{2} \leqslant |z| \leqslant \frac{3}{4}\}$, on considère une fonction h négative de classe C^2 dans B, strictement négative au voisinage de K et nulle au voisinage de $\overline{B}(0, \frac{1}{4})$ et $\delta > 0$ tel que dans B, on ait $dd^c(\varrho + \delta h) \geqslant \frac{C}{2}\beta$. Pour $\varepsilon > 0$, on note $\widetilde{\varrho}_\varepsilon$ la partie positive de la fonction $\varrho + \delta h - \varepsilon$. La fonction $\widetilde{\varrho}_\varepsilon$ est nulle dans un voisinage U_ε de A. De même, comme

$$\forall x \in K \;\; \varrho(x) + \delta h(x) - \varepsilon = \delta h(x) - \varepsilon \leqslant \delta h(x) < 0,$$

la fonction $\widetilde{\varrho}_\varepsilon$ est nulle dans un voisinage U de K (indépendamment de ε). Soit U_1 un voisinage de K tel que $U_1 \Subset U$ et soit ϱ_ε une régularisée de classe C^∞ de $\widetilde{\varrho}_\varepsilon$ définie par $\varrho_\varepsilon = \widetilde{\varrho}_\varepsilon * \theta_\varepsilon$, $(\theta_\varepsilon)_\varepsilon$ étant une famille régularisante sur Ω. On peut supposer que les fonctions ϱ_ε sont nulles dans U_1, qu'elles sont nulles dans un voisinage U'_ε de A et qu'elles vérifient $dd^c\varrho_\varepsilon \geqslant \frac{C}{2}\beta$ sur $B(0, \frac{1}{4}) \cap \{\widetilde{\varrho}_\varepsilon > \varepsilon\}$. Soit $\theta \in \mathcal{D}(B)$ à support dans $B(0, \frac{3}{4})$ et valant 1 au voisinage de $B(0, \frac{1}{2})$. Comme ϱ_ε est nulle au voisinage de A, les courants $\varrho_\varepsilon T$ sont bien définis dans B. De plus, on a $d(\theta d^c\varrho_\varepsilon) = d\theta \wedge d^c\varrho_\varepsilon + \theta dd^c\varrho_\varepsilon$. Ainsi on a :

$$\langle dd^c\varrho_\varepsilon \wedge T, \theta\rangle = \langle bT, \theta d^c\varrho_\varepsilon\rangle + \langle T, d^c\varrho_\varepsilon \wedge d\theta\rangle.$$

D'une part, la forme $d^c\varrho_\varepsilon \wedge d\theta$ est à support dans $V = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \frac{1}{2} \leqslant |z| \leqslant \frac{3}{4}\} \setminus U_1$ et la forme $\theta d^c\varrho_\varepsilon$ est à support dans $B(0, \frac{3}{4}) \setminus U'_\varepsilon$. D'autre part, on montre maintenant que l'on peut majorer les comasses des formes $\theta d^c\varrho_\varepsilon$ et $d^c\varrho_\varepsilon \wedge d\theta$ indépendamment de ε. Pour cela, il suffit de majorer les dérivées partielles de la fonction ϱ_ε sur $B(0,\frac{3}{4})$ pour tout $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ avec ε_0 assez petit. Identifions $\mathbb{C}^n$ à $\mathbb{R}^{2n}$, notons $x = (x_1, x') = (x_1, \ldots, x_{2n})$ les éléments dans $\mathbb{R}^{2n}$ et calculons, par exemple, $\partial\varrho_\varepsilon/\partial x_1$ sur $B(0,\frac{3}{4})$. Soit $(a_1, a') \in B(0,\frac{3}{4})$;

$$\frac{\partial\varrho_\varepsilon}{\partial x_1}(a_1,a') = \widetilde{\varrho}_\varepsilon * \frac{\partial\theta_\varepsilon}{\partial x_1}(a_1,a') = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \widetilde{\varrho}_\varepsilon(x_1,x')\frac{\partial\theta_\varepsilon}{\partial x_1}(x_1-a_1,x'-a')\,dx_1\wedge dx'$$

avec $dx' = dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{2n}$. Il existe un voisinage W de $B(0,\frac{3}{4})$ (indépendant de ε) dans B tel que pour tout $(a_1,a') \in B(0,\frac{3}{4})$ et tout $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, la fonction $(x_1,x') \mapsto \theta_\varepsilon(x_1-a_1, x-a')$ soit à support dans W. On a donc :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varrho_\varepsilon}{\partial x_1}(a_1,a') &= \int_{\operatorname{Supp}\widetilde{\varrho}_\varepsilon\cap W} (\varrho+\delta h-\varepsilon)(x_1,x')\frac{\partial\theta_\varepsilon}{\partial x_1}(x_1-a_1,x'-a')\,dx_1\wedge dx' \\ &= \int_{\operatorname{Supp}\widetilde{\varrho}_\varepsilon\cap W} \frac{\partial(\varrho+\delta h)}{\partial x_1}(x_1,x')\theta_\varepsilon(a_1-x_1,a'-x')\,dx_1\wedge dx' \\ &\quad - \int_{\operatorname{Supp}\widetilde{\varrho}_\varepsilon\cap W} d\big((\varrho+\delta h-\varepsilon)(x_1,x')\theta_\varepsilon(a_1-x_1,a'-x')\,dx'\big).\end{aligned}$$

Comme $\widetilde{\varrho}_\varepsilon(x_1,x')\theta_\varepsilon(a_1-x_1,a'-x')$ est nul sur $\partial(\operatorname{Supp}\widetilde{\varrho}_\varepsilon \cap W)$, cette dernière intégrale est nulle par la formule de Stokes et par suite :

$$\sup_{B(0,\frac{3}{4})}\left|\frac{\partial\varrho_\varepsilon}{\partial x_1}\right| \leqslant \sup_{\overline{W}}\left|\frac{\partial(\varrho+\delta h)}{\partial x_1}\right|.$$

De la même façon, on majore les autres dérivées partielles. Par conséquent, il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ (qui ne dépendent pas de ε) telles que :

$$\langle dd^c\varrho_\varepsilon \wedge T, \theta\rangle \leqslant C_1\mathcal{M}_V(T) + C_2\mathcal{M}_{B(0,\frac{3}{4})\setminus A}(bT).$$

On en déduit donc que :

$$\int_{B(0,\frac{1}{4})\cap\{\widetilde{\varrho}_\varepsilon>\varepsilon\}} T\wedge\beta \leqslant 2\frac{C_1}{C}\mathcal{M}_V(T) + 2\frac{C_2}{C}\mathcal{M}_{B(0,\frac{3}{4})\setminus A}(bT).$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient la majoration :

$$\int_{B(0,\frac{1}{4})\setminus A} T\wedge\beta \leqslant 2\frac{C_1}{C}\mathcal{M}_V(T) + 2\frac{C_2}{C}\mathcal{M}_{B(0,\frac{3}{4})\setminus A}(bT) < +\infty,$$

ce qui prouve que T est de masse localement finie au voisinage des points de A et admet donc une extension triviale $\widetilde{T}$ à Ω. Dans le cas où T est de bidimension (p,p) avec $p > 1$, il suffit d'appliquer ce qui précède au courant $T \wedge \beta^{p-1}$ qui est positif de bidimension $(1,1)$ sur $\Omega \setminus A$.

L'unicité du prolongement provient du Théorème 2.1 : si $\widehat{T}$ est un autre prolongement localement plat de T à Ω, le courant $\widehat{T} - \widetilde{T}$ est alors un courant localement plat de bidimension (p,p) sur Ω à support dans A totalement réelle de classe C^1 et, comme $p \geqslant 1$, ce courant est nul d'après le Théorème 2.1. De la même façon, la relation $(*)$ découle du Théorème 2.1 en l'appliquant au courant $b\widetilde{T} - \widetilde{bT}$.

Montrons maintenant le point 2. On suppose ici que le courant T est de bidimension $(1,1)$ et que la sous-variété A est de classe C^2. On vient de montrer qu'il admet une extension triviale $\widetilde{T}$ à Ω. Cette extension étant positive, elle est d'ordre 0. Il suffit donc de montrer que le courant $d\widetilde{T}$ est d'ordre 0. Soit χ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ positive, croissante, nulle sur $]-\infty, \frac{1}{4}[$ et égale à 1 sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$. Avec les notations du Lemme 3.2, on a :

$$\widetilde{T} = \lim_{r\to 0} \chi\left(\frac{u}{r}\right) T \quad \text{et donc} \quad d\widetilde{T} = \lim_{r\to 0} d\left(\chi\left(\frac{u}{r}\right)T\right).$$

On considère un compact K de Ω et $\phi \in \mathcal{D}^1(\Omega)$ à support dans K que l'on peut écrire

$$\phi = \sum_{k=1}^{n} \phi_k\, d^c \varrho_k,$$

avec $\phi_k \in \mathcal{D}(\Omega)$ d'après le Lemme 3.2. On a alors :

$$\left\langle d\left(\chi\left(\frac{u}{r}\right)T\right), \phi\right\rangle = \left\langle T, \frac{1}{r}\chi'\left(\frac{u}{r}\right) du \wedge \phi\right\rangle + \left\langle \chi\left(\frac{u}{r}\right) dT, \phi\right\rangle.$$

Le courant dT admet une extension triviale $\widetilde{dT}$ à Ω qui est d'ordre 0. Il existe donc une constante $C > 0$ (qui ne dépend que du compact K) telle que :

$$\left|\langle \widetilde{dT}, \phi\rangle\right| \leqslant C|\phi|, \quad \text{i.e.,} \quad \lim_{r\to 0} \left|\left\langle \chi\left(\frac{u}{r}\right) dT, \phi\right\rangle\right| \leqslant C|\phi|.$$

D'autre part, l'expression

$$\left|\left\langle T, \frac{1}{r}\chi'\left(\frac{u}{r}\right) du \wedge \phi\right\rangle\right|$$

est une somme de termes du type

$$A_{j,k} = \left\langle T, \chi'\left(\frac{u}{r}\right)\frac{1}{r}\phi_k \varrho_j\, d\varrho_j \wedge d^c\varrho_k\right\rangle.$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on a :

$$|A_{j,k}| \leqslant \left|\left\langle T, \chi'\left(\frac{u}{r}\right)\frac{1}{r}\varrho_j^2\, d\varrho_j \wedge d^c\varrho_j\right\rangle\right|^{\frac{1}{2}} \left|\left\langle T, \chi'\left(\frac{u}{r}\right)\frac{1}{r}|\phi_k|^2\, d\varrho_k \wedge d^c\varrho_k\right\rangle\right|^{\frac{1}{2}}.$$

Il suffit de majorer ces termes quand la fonction u est strictement inférieure à r (sinon $\chi'(\frac{u}{r})$ est nul). Soit $a \in]0, \sqrt{r}[$. On considère une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ positive et valant 1 au voisinage du compact $\{0 \leqslant |\varrho_j| \leqslant \sqrt{r_0}\}$, et η une fonction de classe C^∞ au voisinage de $[-1,1]$, paire, nulle au voisinage de 0 et vérifiant les conditions suivantes :

$$|\eta| \leqslant 2, \quad |\eta'| \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \eta'' \geqslant (\sqrt{r} - a)^{-1}\mathbb{1}_{\{a \leqslant |z| \leqslant \sqrt{r}\}}.$$

Quitte à restreindre Ω, on peut supposer qu'il existe une constante c positive telle que, dans Ω, on ait $(\eta'\circ\varrho_j)\,dd^c\varrho_j+c\beta\geqslant 0$. Pour des raisons de bidegré, on a :

$$\begin{aligned}\big\langle dd^c\big((\eta\circ\varrho_j)T\big),\varphi\big\rangle&=\big\langle dd^c(\eta\circ\varrho_j)\wedge T,\varphi\big\rangle-\big\langle\eta\circ\varrho_j\,dd^cT,\varphi\big\rangle+2\big\langle(\eta\circ\varrho_j)\,d^cT,d\varphi\big\rangle\\ \big\langle d\big(d^c(\eta\circ\varrho_j)\wedge T\big),\varphi\big\rangle&=\big\langle dd^c(\eta\circ\varrho_j)\wedge T,\varphi\big\rangle-\big\langle\eta\circ\varrho_j\,dd^cT,\varphi\big\rangle+\big\langle\eta\circ\varrho_j\,d^cT,d\varphi\big\rangle.\end{aligned}$$

En combinant les deux équations précédentes, on obtient :

$$\big\langle dd^c(\eta\circ\varrho_j)\wedge T-(\eta\circ\varrho_j)\,dd^cT,\varphi\big\rangle=-\big\langle\eta\circ\varrho_jT,dd^c\varphi\big\rangle+2\big\langle d^c(\eta\circ\varrho_j)\wedge T,d\varphi\big\rangle.$$

Comme $\eta\circ\varrho_j$ est nulle au voisinage de A, on a :

$$\begin{aligned}\big\langle\big(dd^c(\eta\circ\varrho_j)+c\beta\big)\wedge\widetilde{T},\varphi\big\rangle=\big\langle(\eta\circ\varrho_j)\,dd^cT,\varphi\big\rangle&+2\big\langle d^c(\eta\circ\varrho_j)\wedge T,d\varphi\big\rangle\\ &+\big\langle c\beta\wedge\widetilde{T},\varphi\big\rangle-\big\langle(\eta\circ\varrho_j)T,dd^c\varphi\big\rangle.\end{aligned}$$

Or

$$dd^c(\eta\circ\varrho_j)=d\big((\eta'\circ\varrho_j)\,d^c\varrho_j\big)=(\eta''\circ\varrho_j)\,d\varrho_j\wedge d^c\varrho_j+(\eta'\circ\varrho_j)\,dd^c\varrho_j,$$

donc

$$dd^c(\eta o\varrho_j)+c\beta\geqslant(\eta''o\varrho_j)\,d\varrho_j\wedge d^c\varrho_j\geqslant(\sqrt{r}-a)^{-1}\mathbb{1}_{\{a\leqslant|\varrho_j|\leqslant\sqrt{r}\}}\,d\varrho_j\wedge d^c\varrho_j.$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}\int\limits_{\{a\leqslant|\varrho_j|\leqslant\sqrt{r}\}}T\wedge d\varrho_j\wedge d^c\varrho_j\leqslant(\sqrt{r}-a)\Big[&\big\langle dT,d^c\big((\eta\circ\varrho_j)\varphi\big)\big\rangle+2\big\langle T,d^c(\eta\circ\varrho_j)\wedge d\varphi\big\rangle\\ &+c\big\langle\widetilde{T},\varphi\beta\big\rangle-\big\langle T,(\eta\circ\varrho_j)\,dd^c\varphi\big\rangle\Big].\end{aligned}$$

D'après les hypothèses faites sur η, il existe des constantes C_1 et C_2 strictement positives qui ne dépendent ni de a ni de r telles que :

$$\int\limits_{\{a\leqslant|\varrho_j|\leqslant\sqrt{r}\}}T\wedge d\varrho_j\wedge d^c\varrho_j\leqslant(\sqrt{r}-a)\big(C_1\mathcal{M}_\Omega(\widetilde{T})+C_2\mathcal{M}_{\Omega\setminus A}(bT)\big),$$

car $\eta\circ\varrho_j$ est nulle au voisinage de A. En faisant tendre a vers 0, on obtient :

$$\int\limits_{\{0\leqslant|\varrho_j|\leqslant\sqrt{r}\}}T\wedge d\varrho_j\wedge d^c\varrho_j\leqslant\sqrt{r}\big(C_1\mathcal{M}_\Omega(\widetilde{T})+C_2\mathcal{M}_{\Omega\setminus A}(bT)\big).$$

On en déduit qu'il existe une constante B (qui ne dépend pas de r) telle que :

$$|A_{j,k}|\leqslant B\left(\frac{1}{r}r\sqrt{r}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{r}\sqrt{r}\right)^{\frac{1}{2}}|\phi|,\quad\text{donc}\quad\left|\left\langle\chi\left(\frac{u}{r}\right)dT,\phi\right\rangle\right|\leqslant B|\phi|.$$

Comme la constante B ne dépend pas de r, on a :

$$\lim_{r\to0}\left|\left\langle\chi\left(\frac{u}{r}\right)dT,\phi\right\rangle\right|\leqslant B|\phi|.$$

Finalement, on a montré qu'il existe des constantes C et C' telles que :

$$\big|\langle d\widetilde{T},\phi\rangle\big| \leqslant \big(C\mathcal{M}_{\Omega}(\widetilde{T}) + C'\mathcal{M}_{\Omega\setminus A}(bT)\big)|\phi|.$$

Le courant $d\widetilde{T}$ est donc 0-continu et par suite, $\widetilde{T}$ est localement normal.

Deuxième étape : M est supposée CR. On se ramène par tranchage à l'étape précédente. Montrons tout d'abord que T est de masse localement finie au voisinage des points de A. En raisonnant localement, on peut supposer que $0 \in A$ et que :

$$T_0 A \cap i T_0 A = \{z \in \mathbb{C}^n \mid z_{k+1} = \cdots = z_n = 0\}.$$

Pour $z \in \mathbb{C}^n$, on note $z' = (z_1,\ldots,z_k) \in \mathbb{C}^k$ et $z'' = (z_{k+1},\ldots,z_n) \in \mathbb{C}^{n-k}$. Il existe un voisinage V de 0 dans $\mathbb{C}^k$ et un voisinage B de 0 dans $\mathbb{C}^{n-k}$ tels que pour tout z_0' dans V, l'ensemble

$$A(z_0') = \{z \in A \mid z' = z_0'\}$$

soit une sous-variété totalement réelle de classe C^1 de $\{z_0'\} \times B$. On peut supposer que B est la boule unité de $\mathbb{C}^{n-k}$. Pour z' fixé dans V, la fonction définie par $\varrho_{z'}(z'') = (\operatorname{dist}(z'', A(z')))^2$ est de classe C^2 dans B, strictement plurisousharmonique et vérifie $dd^c\varrho_{z'} \geqslant C(z')\beta$. De plus, quitte à restreindre V, on peut supposer que $C(z')$ est minoré par une constante $C > 0$ pour $z' \in V$. On a alors $A(z') = \{z'' \in B \mid \varrho_{z'}(z'') = 0\}$. Considérons la projection canonique $\pi : B \times V \to V$. Le courant T étant localement normal sur $\Omega \setminus A$, on peut définir, pour presque tout z' de V, la tranche $\langle T,\pi,z'\rangle$ (cf. [8]) ; c'est un courant positif de bidimension $(p-k,p-k)$ dans $B \setminus A(z')$. D'après l'étape précédente, il existe un ouvert U_1 dans B tel que, pour tout $z' \in V$, on ait $A(z') \cap \{z'' \in B \mid \frac{1}{2} \leqslant |z''| \leqslant \frac{3}{4}\} \subset U_1$. De plus, le courant $b\langle T,\pi,z'\rangle = \langle bT,\pi,z'\rangle$ étant de masse localement finie près des points de A et $p-k \geqslant 1$, il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que :

$$\begin{aligned}\big\|\langle T,\pi,z'\rangle\big\|\big(B''\big(0,\tfrac14\big)\setminus A(z')\big) \leqslant{}& \frac{C_1}{C(z')}\mathcal{M}_{B''(0,\frac34)\setminus(B''(0,\frac12)\cup U_1)}\big(\langle T,\pi,z'\rangle\big)\\ &+\frac{C_2}{C(z')}\mathcal{M}_{B''(0,\frac34)\setminus A(z')}\big(b\langle T,\pi,z'\rangle\big).\end{aligned}$$

En faisant varier π (cf. [8]), on obtient une famille finie de projections telle que :

$$\|T\|\big(V\times B''\big(0,\tfrac14\big)\setminus A\big) \leqslant \sum_I \int_V \big\|\langle T,\pi^I,z'\rangle\big\|\big(B''\big(0,\tfrac14\big)\setminus A(z')\big)\,d\lambda(z').$$

Comme $C(z')$ est minorée par C, pour chaque I, il existe des constantes C_1^I et C_2^I telles que :

$$\begin{aligned}\big\|\langle T,\pi^I,z'\rangle\big\|\big(B''\big(0,\tfrac14\big)\setminus A(z')\big) \leqslant{}& C_1^I\mathcal{M}_{B''(0,\frac34)\setminus(B''(0,\frac12)\cup U_1)}\big(\langle T,\pi^I,z'\rangle\big)\\ &+C_2^I\mathcal{M}_{B''(0,\frac34)\setminus A(z')}\big(b\langle T,\pi^I,z'\rangle\big).\end{aligned}$$

Il existe donc, en utilisant la théorie du slicing de Federer, des constantes C et C' telles que :

$$\begin{aligned}\|T\|\big(V\times B''\big(0,\tfrac14\big)\setminus A\big) \leqslant{}& C\mathcal{M}_{V\times(B''(0,\frac34)\setminus(B''(0,\frac12)\cup U_1))}(T)\\ &+C'\mathcal{M}_{V\times B''(0,\frac34)\setminus A}(bT) < +\infty.\end{aligned}$$

Ainsi T admet une extension triviale $\widetilde{T}$ à Ω.

Comme dans la première étape, l'unicité du prolongement et la relation $(*)$ entre les extensions triviales provient du Théorème 2.1.

Il reste à montrer le point 2. On suppose ici $p = k+1$ et que la sous-variété A est de classe C^2. Il suffit de montrer que le courant $d\widetilde{T}$ est 0-continu. On note $S = d\widetilde{T}$. Soit $a \in A$. Il existe un voisinage $U = \Delta_k \times \Delta_{n-k}$ de a dans $\mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k}$ et un système de coordonnées convenable tels que pour tout $z_0' \in \Delta_k$, la sous-variété $A(z_0') = \{z \in A \mid z' = z_0'\}$ soit totalement réelle de classe C^2. Notons $\pi : U \to \Delta_k$ la projection canonique. Pour presque tout $z' \in \Delta_k$, le courant S admet une tranche $\langle S, \pi, z'\rangle$ de dimension 1 qui est à support dans $\pi^{-1}(z')$. Pour toute forme ϕ de degré 1 sur U et toute forme ω de bidegré (k,k) sur Δ_k, on a, par la formule de tranchage,

$$\int_U S \wedge \phi \wedge \pi^*\omega = \int_{\Delta_k} \langle S, \pi, z'\rangle(\phi)\omega.$$

De la même façon, T admet, pour presque tout $z' \in \Delta_k$, une tranche $\langle T, \pi, z'\rangle$ qui est de plus positive de bidimension $(1,1)$ à support dans $\pi^{-1}(z') \setminus A(z')$. D'après l'étape précédente, $\langle T, \pi, z'\rangle$ admet un prolongement localement normal à Ω noté $\langle \widetilde{T, \pi, z'}\rangle$. Comme

$$\langle \widetilde{T, \pi, z'}\rangle = \langle \widetilde{T}, \pi, z'\rangle,$$

d'après le Théorème 2.1, on a :

$$\left|\left\langle d\langle \widetilde{T, \pi, z'}\rangle, \phi\right\rangle\right| \leqslant \left(C_{z'}\mathcal{M}_{\{z'\}\times\Delta_{n-k}}\left(\langle \widetilde{T}, \pi, z'\rangle\right) + C'_{z'}\mathcal{M}_{\{z'\}\times\Delta_{n-k}\setminus A(z')}\left(b\langle T, \pi, z'\rangle\right)\right)|\phi|.$$

D'autre part, en intégrant

$$\int_U S \wedge \phi \wedge \pi^*\omega = \int_{\Delta_k} \left\langle d\langle \widetilde{T}, \pi, z'\rangle, \phi\right\rangle\omega,$$

on obtient des constantes K et K' telles que :

$$\left|\int_U S \wedge \phi \wedge \pi^*\omega\right| \leqslant \left(K\mathcal{M}_U(\widetilde{T}) + K'\mathcal{M}_{U\setminus A}(bT)\right)|\phi||\omega|,$$

car les constantes $C_{z'}$ et $C'_{z'}$ dépendent continûment de z'. Le courant S est donc, en faisant varier π, 0-continu et par suite $\widetilde{T}$ est localement normal. $\square$

Remarque. – Le Théorème 3.3 reste valable pour une sous-variété de classe C^1 d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ vérifiant seulement $\dim_a^{CR} A \leqslant k$ pour tout $a \in A$. La démonstration est identique.

Dans le cas où le courant T est fermé, les hypothèses du Théorème 3.3 sont clairement vérifiées ; on retrouve ainsi les théorèmes de prolongement des courants positifs fermés de N. Sibony et H. El Mir et par suite, le résultat de prolongement d'ensembles analytiques de E.M. Chirka (cf. [2]) en considérant le courant d'intégration sur l'ensemble analytique de P. Lelong (cf. [13]) : *avec les notations du Théorème* 3.3, *si X est un sous-ensemble analytique complexe de dimension pure p de $\Omega \setminus A$ avec $p \geqslant k+2$, alors $\overline{X}$ est un sous-ensemble analytique complexe de Ω de même dimension.*

Étude du cas limite $p = k + 1$ pour une sous-variété réelle analytique Levi-plate

Dans ce cas, on n'a pas nécessairement la relation $(*)$, comme on le voit en considérant le demi-plan de Poincaré dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Cependant, on peut montrer l'existence d'un majorant de T «optimal».

PROPOSITION 3.4. – *Soit A une sous-variété analytique réelle CR Levi-plate d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ de dimension CR égale à $p-1$. On considère un courant positif T de bidimension (p, p) sur $\Omega \setminus A$. On suppose que le courant bT admet une extension triviale $\widetilde{bT}$ à Ω telle que son bord $b(\widetilde{bT})$ soit un courant de bidimension $(p-1, p-1)$ sur Ω. Alors, pour tout point a de A, il existe un voisinage U de a dans Ω et un courant positif S de bidimension (p, p) dans U tels que* :

$$(**)\qquad T_{|U\setminus A} \leqslant S_{|U\setminus A} \quad et \quad bS = \left(\widetilde{bT} + (-1)^p \lambda_\#\big(\widetilde{bT}\big)\right)_{|U},$$

où λ est une application propre de U dans U. En particulier, si T est fermé, le courant S l'est également ; autrement dit, le courant T n'a pas de singularité essentielle dans Ω.

Démonstration. – D'après la Proposition 1.1, la sous-variété A est localement biholomorphe à $\mathbb{C}^{p-1} \times \mathbb{R}^{n-p+1}$. En raisonnant localement, on peut donc supposer que Ω s'écrit $\Omega = U \times V$ avec U un ouvert connexe de $\mathbb{C}^{p-1}$ et V un ouvert de $\mathbb{C}^{n-p+1}$ stables par conjugaison et que $A = \Omega \cap (\mathbb{C}^{p-1} \times \mathbb{R}^{n-p+1})$. D'après le Théorème de prolongement 3.3, le courant T admet une extension triviale $\widetilde{T}$ à Ω. L'application σ désignant la conjugaison sur Ω, on vérifie aisément que le courant $(-1)^p \sigma_\# T$ est positif de bidimension (p, p) sur $\Omega \setminus A$. On pose alors :

$$S = \widetilde{T} + (-1)^p \sigma_\# \widetilde{T}.$$

Comme $\sigma_\# \widetilde{T} = \widetilde{\sigma_\# T}$ d'après le Théorème 2.2, le courant S est par conséquent l'extension triviale à Ω du courant $T + (-1)^p \sigma_\# T$. Ainsi le courant S majore bien T sur $\Omega \setminus A$. Il reste à calculer bS. D'une part, on a $bS = b\widetilde{T} + (-1)^p \sigma_\#(b\widetilde{T})$. D'autre part, comme $b\widetilde{T} - \widetilde{bT}$ est localement plat dans Ω et à support dans A, il existe, d'après un théorème de support de Federer, un courant Θ sur A de dimension $2p-1$ tel que $b\widetilde{T} - \widetilde{bT} = i_\# \Theta$ où $i : A \hookrightarrow \Omega$ est l'injection canonique. D'après l'hypothèse faite sur le bord de $\widetilde{bT}$, on peut appliquer le Corollaire 2.3 au courant Θ : il existe un courant R de dimension 1 sur V à support dans $V \cap \mathbb{R}^{n-p+1}$ tel que $\Theta = [U] \otimes R$. Si σ' désigne la conjugaison sur U et R étant invariant par conjugaison, on a :

$$\sigma_\#\big(b\widetilde{T} - \widetilde{bT}\big) = \sigma'_\#\big([U]\big) \otimes R = (-1)^{p-1}[U] \otimes R = (-1)^{p-1}\big(b\widetilde{T} - \widetilde{bT}\big),$$

ce qui nous donne la relation cherchée. $\square$

Ce résultat était connu dans le cas des courants positifs fermés de bidimension $(1, 1)$ et une sous-variété réelle analytique totalement réelle (cf. [12] et [16] théorème 3.5.). Par ailleurs, en termes d'ensembles analytiques, la proposition précédente se traduit de la façon suivante :

COROLLAIRE 3.5. – *Soit A une sous-variété analytique réelle CR Levi-plate d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ de dimension CR égale à $p-1$. On considère un sous-ensemble analytique complexe X de dimension pure p de $\Omega \setminus A$. Alors, pour tout point a de $A \cap \overline{X}$, il existe un voisinage U de a dans Ω et un sous-ensemble analytique complexe Y de dimension pure p de U tels que* :

$$X \cap (U \setminus A) \subset Y \cap (U \setminus A),$$

i.e., X n'a pas de singularité essentielle dans Ω.

On montre ainsi le résultat de E.M. Chirka énoncé dans [3].

4. Application au prolongement à travers un ensemble analytique réel

Le premier résultat concerne les courants positifs fermés dans le cas où l'obstacle est un ensemble analytique réel de petite dimension.

PROPOSITION 4.1. – *Soit A un sous-ensemble analytique réel d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ et soit T un courant positif fermé de bidimension (p,p) sur $\Omega\setminus A$. Si $\dim_{\mathbb{R}} A \leqslant 2p-1$, alors le courant T n'a aucune singularité essentielle dans Ω. Si de plus, la partie régulière A_{reg} de A vérifie* :

$$(**) \qquad \dim_{\mathbb{C}}(T_a A_{\mathrm{reg}} \cap i T_a A_{\mathrm{reg}}) < p-1 \quad \forall a \in A_{\mathrm{reg}},$$

alors tout courant positif Θ de bidimension (p,p) sur $\Omega\setminus A$, tel que son bord $b\Theta$ admette une extension triviale $\widetilde{b\Theta}$ à Ω, admet une extension triviale $\widetilde{\Theta}$ à Ω qui vérifie $b\widetilde{\Theta} = \widetilde{b\Theta}$.

Démonstration. – On désigne par A^* l'ensemble des éléments réguliers de A en lesquels la dimension réelle de A vaut $2p-1$, et on note alors $S = A\setminus A^*$ et $\Omega^* = \Omega\setminus S$. Comme A^* est une sous-variété réelle lisse de Ω de dimension réelle $2p-1$, un théorème de prolongement des courants positifs fermés de R. Harvey (cf. [10]) montre que le courant T admet une extension triviale T^* à Ω^*. Son bord bT^* est alors localement plat, fermé, de dimension $2p-1$ sur Ω^* et à support dans A^* de dimension réelle $2p-1$. Il s'écrit donc

$$bT^* = \sum_{i\in I} \lambda_i [A_i^*],$$

où, pour $i\in I$, $\lambda_i \in \mathbb{R}^*$ et A_i^* est une composante connexe de A^*. Le bord bT^* admet donc un prolongement de masse localement finie dans Ω. D'autre part, $\mathcal{H}_{2p-1}(S)=0$ (où $\mathcal{H}_{2p-1}$ est la *mesure de Hausdorff* de dimension $2p-1$ sur Ω). D'après un théorème de prolongement des courants positifs de J.-B. Poly et G. Raby (cf. [15]), le courant T^* admet une extension triviale à Ω. Par suite, le courant T admet une extension triviale $\widetilde{T}$ à Ω.

Il reste à montrer que l'on peut la majorer par un courant positif fermé. Pour tout $i\in I$, le courant $[A_i^*]$ a une composante de bidimension $(p,p-1)$ et une de bidimension $(p-1,p)$ sur Ω^*. La sous-variété A_i^*, $i\in I$, est donc CR de dimension CR égale à $p-1$, i.e., A_i^* est maximalement complexe. Soit a un élément de $\bigcup_{i\in I}\overline{A_i^*}$. Il existe alors un germe d'ensembles analytiques réels en a contenant les germes en a des ensembles $\overline{A_i^*}$, $i\in I$, et soit X_a le plus petit de ces germes. D'après [18], il existe un germe Y_a en a d'ensembles analytiques complexes de dimension complexe pure p qui contient le germe X_a. Soient X et Y des représentants respectifs de X_a et Y_a dans un voisinage U de a dans Ω. On note $U^* = U\setminus S$. Le courant ${T^*}_{|U^*\setminus Y}$ est positif fermé de bidimension (p,p) sur $U^*\setminus Y$ et est de masse localement finie au voisinage des points de Y. Il admet donc une extension triviale $\widetilde{T^*}$ à Ω^*, qui est positive fermée d'après un théorème de prolongement de Skoda–El Mir (cf. [7,17]). Comme $\mathcal{H}_{2p-1}(S)=0$, le théorème de prolongement de Harvey montre que le courant $\widetilde{T^*}$ admet également une extension triviale R à U positive fermée. Considérons le courant $(T-R)_{|U\setminus A}$; c'est un courant localement normal de bidimension (p,p) sur $U\setminus A$ à support dans $Y\cap(U\setminus A)$. Il s'écrit donc :

$$(T-R)_{|U\setminus A} = \sum_{j\in J} \mu_j [Z_j],$$

où, pour $j \in J$, $\mu_j \in \mathbb{R}^*$ et Z_j est une composante irréductible de $Y \cap (U \setminus A)$. On définit alors le courant S sur U comme suit :

$$S = R + \sum_{j \in J} \rho_j [Y_j],$$

où, pour tout $j \in J$, $\rho_j = |\mu_j|$, et Y_j est la composante irréductible de $Y \cap U$ qui contient Z_j. Le courant S est positif fermé sur U et vérifie $T_{|U \setminus A} \leqslant S_{|U \setminus A}$.

En ce qui concerne la deuxième assertion, la démarche est la même : on montre, à l'aide du théorème de prolongement de Poly–Raby, que le courant Θ admet une extension triviale Θ^* à Ω^*. D'autre part, le courant $bT^* - \widetilde{bT}_{|\Omega^*}$ est nul d'après $(**)$ et le Théorème 2.1. Par suite, le courant bT^* se prolonge en un courant de masse localement finie dans Ω. Comme, de plus, $\mathcal{H}_{2p-1}(S) = 0$, le théorème de prolongement de Poly–Raby montre que le courant T^* admet une extension triviale $\widetilde{T}$ à Ω qui vérifie $b\widetilde{T} = \widetilde{bT^*} = \widetilde{bT}$. □

On en déduit un résultat sur le prolongement de sous-ensembles analytiques :

COROLLAIRE 4.2. – *Soient A un sous-ensemble analytique réel d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ et X un sous-ensemble analytique complexe de dimension pure p de $\Omega \setminus A$. Si $\dim_{\mathbb{R}} A \leqslant 2p - 1$, alors X n'a aucune singularité essentielle dans Ω. Si de plus, la partie régulière A_{reg} de A vérifie la condition $(**)$, alors l'ensemble $\overline{X}$ est un sous-ensemble analytique complexe de Ω.*

Notons que la condition $(**)$ ne suffit pas pour obtenir l'existence de l'extension triviale comme le montre l'exemple qui suit : on considère le sous-ensemble analytique réel :

$$A = \left\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid x_2 = y_3^2 x_1, \quad y_2 = 0 \ \text{ et } \ x_3^2 = y_3^3\right\},$$

où, pour tout $j \in \langle 1, 3\rangle$, on note $z_j = x_j + i y_j$. Sa partie singulière est égale à $\mathbb{C} \times \{0\} \times \{0\}$. D'autre part, on montre que la partie régulière de A est totalement réelle. Considérons maintenant le sous-ensemble analytique complexe V de $\mathbb{C}^3 \setminus A$ défini par :

$$V = \bigcup_{n \geqslant 1} \mathbb{C} \times \{\tfrac{1}{n}\} \times \{0\}.$$

L'ensemble analytique V n'est pas de volume localement fini au voisinage des points de $\mathbb{C} \times \{0\} \times \{0\}$. L'hypothèse $(**)$ permet de «passer à travers» la partie régulière, mais ne permet pas de «passer à travers» la partie singulière, qui a une dimension CR trop grande. On a cependant le résultat suivant :

PROPOSITION 4.3. – *Soit A un sous-ensemble réel analytique d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ et soit T un courant positif de bidimension (p, p) sur $\Omega \setminus A$ tel que son bord bT admette une extension triviale $\widetilde{bT}$ à Ω. On suppose que le sous-ensemble A vérifie la propriété* (P) *suivante : pour toute sous-variété réelle analytique $\Sigma \subset A$ localement fermée, on a $\dim_a^{CR} \Sigma < p - 1$ pour tout $a \in \Sigma$. Alors le courant T admet une extension triviale $\widetilde{T}$ à Ω qui vérifie $b\widetilde{T} = \widetilde{bT}$.*

Démonstration. – Remarquons tout d'abord qu'il existe une suite de sous-ensembles réels analytiques $\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_{m-1} \subset A_m$ telle que, pour tout $j \in \langle 1, m\rangle$, on ait $\dim_{\mathbb{R}} A_{j-1} < \dim_{\mathbb{R}} A_j$, $A_j \setminus A_{j-1}$ soit une sous-variété réelle analytique de Ω et telle que A s'écrive :

$$A = \bigcup_{j=1}^{m} (A_j \setminus A_{j-1}).$$

En posant alors

$$\Omega_k = \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{k} (A_j \setminus A_{j-1}),$$

pour tout $k \in \langle 1, m\rangle$, on montre, en utilisant l'hypothèse (P) et le Théorème 3.3—plus précisément la remarque qui suit le théorème—que le courant T est de masse localement finie au voisinage des points de $A_m \setminus A_{m-1}$, et admet, par conséquent, une extension triviale T^{m-1} à Ω_{m-1} qui vérifie par ailleurs $bT^{m-1} = \widetilde{bT}_{|\Omega_{m-1}}$. Il suffit alors de réitérer ce raisonnement pour j décrivant $\langle 1, m\rangle$. On obtient ainsi une extension triviale $\widetilde{T}$ du courant T à Ω telle que son bord soit égal à $\widetilde{bT}$. □

Une fois de plus, il en découle un résultat sur le prolongement d'ensembles analytiques :

COROLLAIRE 4.4. – *Si A est un sous-ensemble réel analytique d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ vérifiant les hypothèses de la Proposition* 4.3 *et si X est un sous-ensemble analytique complexe de dimension pure p de $\Omega \setminus A$, alors l'ensemble $\overline{X}$ est un sous-ensemble analytique complexe de Ω de même dimension.*

RÉFÉRENCES

[1] A. BOGGESS, *CR Manifolds and the Tangential Cauchy–Riemann Complex*, Studies in Advanced Mathematics, 1989.

[2] E.-M. CHIRKA, On removable singularities of analytic sets, *Soviet Math. Dokl.* 20 (1979) 965–968.

[3] E.-M. CHIRKA, *Complex Analytic Sets*, Kluwer Academic Publishers, 1989.

[4] E.-M. CHIRKA, Introduction to the geometry of CR-manifolds, *Russian Math. Surveys* 46 (1) (1991) 95–197.

[5] G. DE RHAM, *Variétés Différentiables*, Hermann, 1960.

[6] J.-P. DEMAILLY, Courants positifs extrêmaux et conjecture de Hodge, *Inventiones Math.* 69 (1982) 347–374.

[7] H. EL MIR, Sur le prolongements des courants positifs fermés, *Acta. Math.* 153 (1984) 1–45.

[8] H. FEDERER, *Geometric Measure Theory*, Springer, Berlin, 1969.

[9] S. GIRET, Sur le tranchage et le prolongement de courants, Thèse de Doctorat de l'Université de Poitiers, 1998.

[10] F. R. HARVEY, Removable singularities for positive currents, *Amer. J. Math.* 96 (1974) 67–78.

[11] F. R. HARVEY and R. O. WELLS, Holomorphic approximation and hyperfunction theory on a C^1 totally real submanifold of a complex manifold, *Math. Ann.* 197 (1972) 287–318.

[12] J.-R. KING, The currents defined by analytic varieties, *Acta. Math.* 127 (1971), 185–220.

[13] P. LELONG, Intégration sur un ensemble analytique complexe, *Bull. Soc. Math. France* 85 (1957) 239–262.

[14] P. LELONG, *Fonctions Plurisousharmoniques et Formes Différentielles Positives*, Gordon & Breach, Paris, 1968.

[15] J.-B. POLY and RABY, Prolongement de courants positifs à travers de petits obstacles, (1997). À paraître aux *Proceedings of AMS*.

[16] N. SIBONY, Quelques problèmes de prolongement de courants en analyse complexe, *Duke Math. Journal* 52 (1985) 157–197.

[17] H. SKODA, Prolongement des courants positifs fermés de masse finie, *Inventiones Math.* 66 (1982) 361–376.

[18] J. SOUVILLE, Ensembles analytiques complexes à bord semi-analytique, *C. R. Acad. Sci. Paris* 302 (1986) 111–114.